NOZIONI DI GEOMETRIA PIANA

Marino prof. Mazzoni

CLASSI I / II / III indirizzo - Meccanici

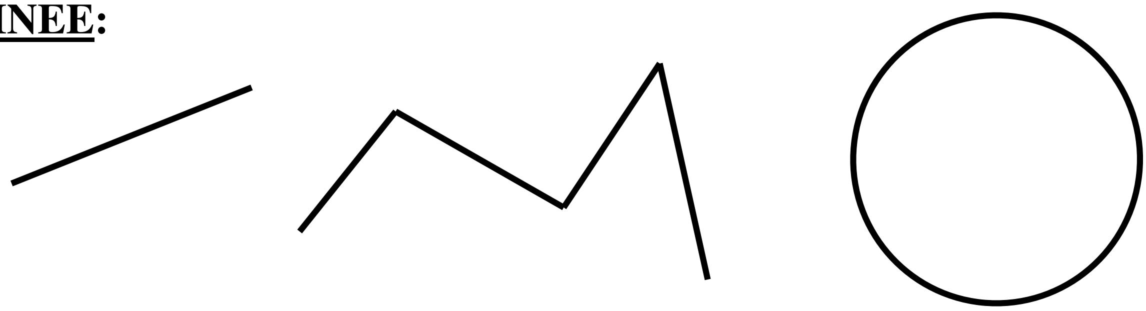
1) PUNTO:

A B C

. . .

IL punto è adimensionale, cioè, è infinitesimamente piccolo.
Può giacere su un piano o nello spazio.
Il punto geometrico viene indicato con la lettera maiuscola.

2) LINEE:



Possono essere: rettilinee, spezzate, curve, circolari, ecc.
Sono però sempre una sequenza di punti infinitesimamente piccoli e uno vicino all'altro in secessione.

3) SUPERFICIE:

E' bidimensionale. Ha una base ed una altezza.

L x L = Quadrato, rettangolo

π per r^2 = Superficie del cerchio

$$\frac{\text{B per h}}{2} = \text{Superficie del triangolo}$$

Si misura in cm², m², mm², e così via…..

4) <u>SPAZIO</u>:

E' tridimensionale. Ha base, altezza e profondità.

L per L per L = parallelepipedo di forma regolare detto cubo.

π per r^2 per h = Cilindro (Alesaggio x corsa)

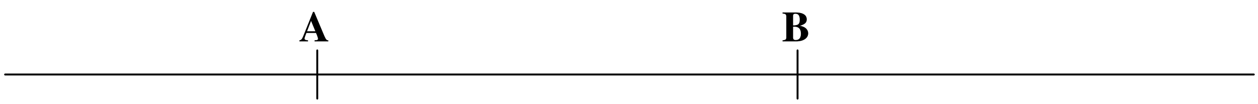
$$\frac{4}{3}\ \pi \text{ per } r^3 = \text{Volume della sfera}$$

5) <u>LA RETTA</u>:

a

La linea retta è estesa senza limiti sia a destra che a sinistra di quella tracciata, cioè, all'infinito.
Se non importa specificare nessun punto che determina una retta, la stessa verrà designata con una lettera minuscola.

6) <u>RETTA PASSANTE PER DUE PUNTI</u>:



Passa una e una sola retta. Sia sul piano che nello spazio.
La retta che passa per due punti A – B si dice <u>Congiungente.</u>

7) <u>PIANI PASSANTI PER UNA RETTA NELLO SPAZIO</u>:

Passano infiniti piani. (Fare l'esempio della porta e dei cardini)

8) <u>SEMIRETTA</u>:

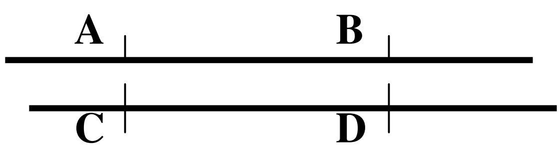
Il punto A divide una retta in due semirette di cui il punto A ne rappresenta l'origine.
Si dice che una delle due semirette è il prolungamento dell'altra.

9) <u>SEGMENTO:</u>

Il tratto di semiretta racchiuso dai due punti A e B si definisce segmento. A e B ne rappresentano gli estremi.
Segmento è una parte di retta delimitata da due punti.

Segmenti uguali sono quando i loro estremi combaciano.
E si scrive:

AB = CD

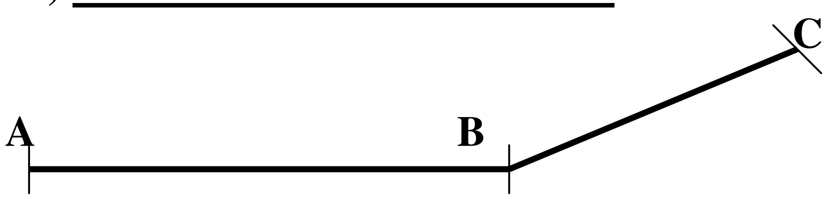


Sono invece disuguali quando i loro estremi non combaciano.
E si scrive:

AB ≠ CD

E più esattamente AB < CD oppure AB > CD
Nel primo caso si legge AB minore di CD (<) ; nel secondo caso AB maggiore di CD (>).

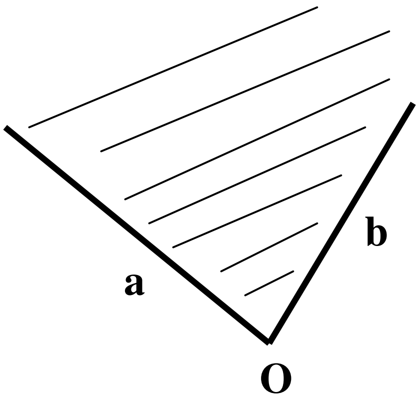
10) <u>SEGMENTI CONSECUTIVI</u>:



Hanno uno stesso "estremo" B ma nessun altro punto in comune.

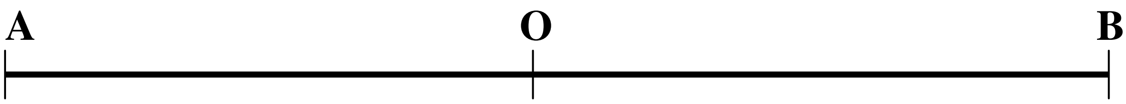
Si dicono adiacenti quando giacciono sulla stessa retta.

<u>ANGOLI</u>



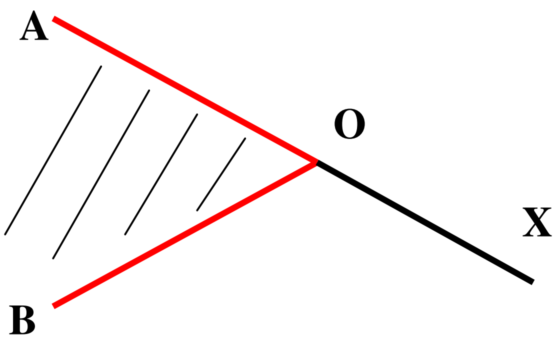
a e b sono due semirette che hanno un punto in comune O detto origine.
Le due semirette consecutive dividono il piano in due parti : quella tratteggiata e quella non tratteggiata.
Le semirette si definiscono lati di un triangolo e la loro origine si definisce vertice.
Potremmo pertanto scrivere a Ô b

1) <u>ANGOLO PIATTO</u>:



Se i lati sono adiacenti e l'origine o vertice giace sullo stesso piano, si definisce l'angolo piatto.   A Ô B = 180°

2) <u>ANGOLI CONVESSI E CONCAVI</u>:



Quello distinto con il tratteggio si dice convesso, l'altro non tratteggiato si dice concavo.

Il prolungamento X entra nell'angolo concavo.
Concavo se contiene i prolungamenti – Convesso se non li contiene.

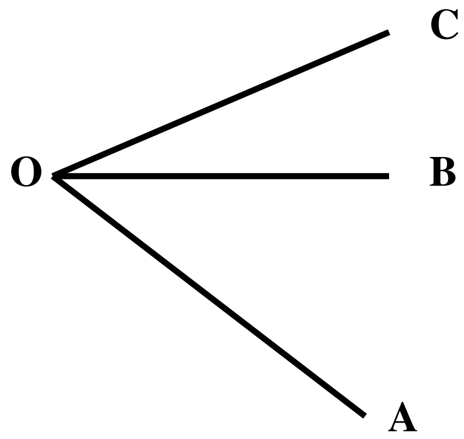
3) <u>ANGOLI UGUALI</u>:

Due angoli convessi o concavi sono uguali quando coincidono i lati dell'uno posti sopra l'altro.

4) <u>ANGOLI DISUGUALI</u>:

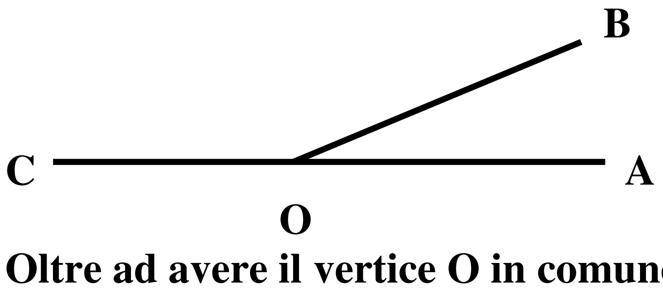
Risultano disuguali quando posti uno sopra l'altro i lati non coincidono.

5) <u>ANGOLI CONSECUTIVI</u>:



A Ô B e B Ô C sono consecutivi avendo O come vertice in comune ed un lato.

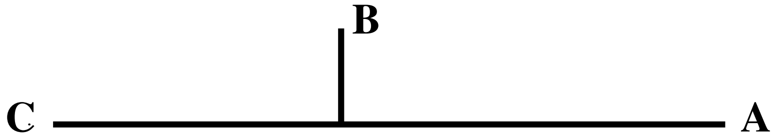
6) <u>ANGOLI ADIACENTI</u>:



AÔB + BÔC = AÔC = 180°

Oltre ad avere il vertice O in comune, hanno un lato in comune e gli altri due sulla stessa retta.

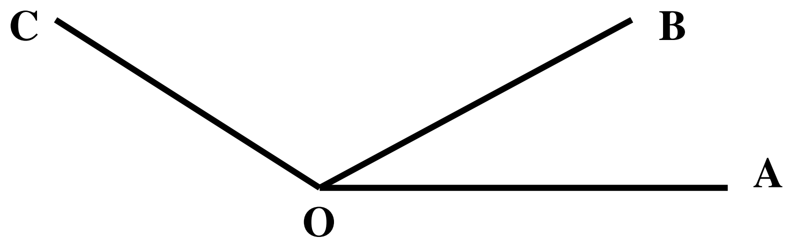
7) <u>ANGOLO RETTO</u>:



Gli angoli piatti sono uguali fra loro! Sono uguali anche le loro metà. AÔB = BÔC

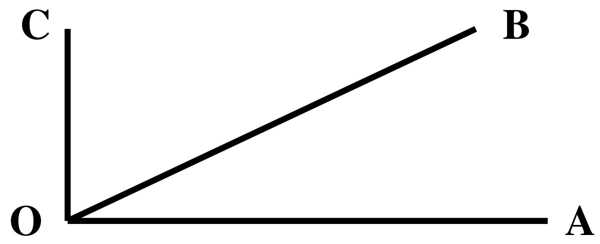
La metà di un angolo piatto si dice angolo retto.

8) <u>ANGOLI ACUTI E OTTUSI</u>:



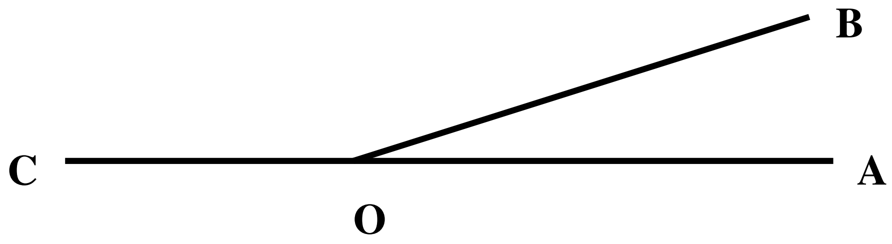
Si dice acuto un angolo minore di uno retto AÔB
Si dice ottuso un angolo maggiore di uno retto BÔC

9) <u>ANGOLI COMPLEMENTARI</u>:



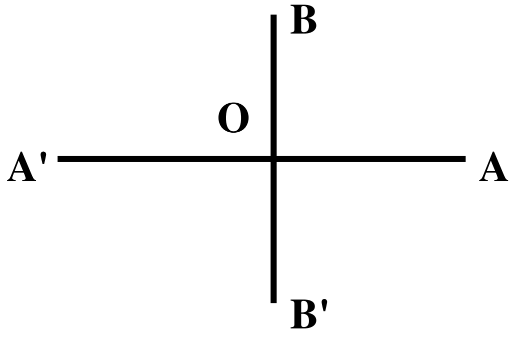
Sono complementari due angoli la cui somma è pari ad un angolo retto.

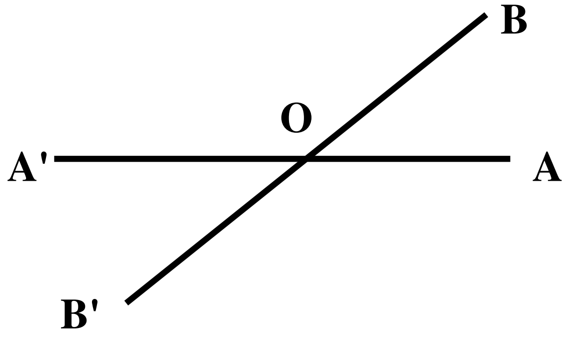
10) <u>ANGOLI SUPPLEMENTARI</u>:



Sono supplementari due angoli la cui somma è pari ad un angolo piatto.

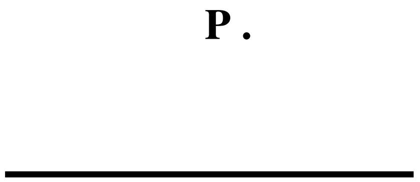
<u>1) RETTE PERPENDICOLARI E RETTE OBLIQUE</u>:

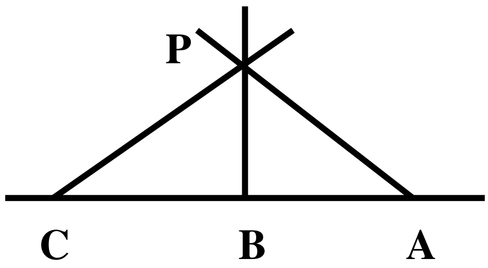




Sono perpendicolari le rette che tagliandosi formano quattro angoli retti.
Oblique sono le rette che tagliandosi non formano nemmeno un angolo retto.

2) <u>PUNTO ESTERNO AD UNA RETTA</u>:





Per un punto esterno ad una retta passa una e una sola retta perpendicolare alla retta data. Le altre saranno tutte oblique.

<u>MISURA DEGLI ANGOLI</u>:

La novantesima parte di un angolo retto si dice grado.
Il grado si divide a sua volta in sessanta parti uguali che si definiscono "Primo di grado" o semplicemente "Primo".
Il primo si divide a sua volta in sessanta parti uguali che si dicono "Secondi di primo" o comunemente "Secondi".

Esempio di scrittura: AÔB = 15° 22' 12"

<u>INTERVALLO !!!</u>

Eseguire le seguenti divisioni senza la calcolatrice.

4140 : 12 = 345
48442,75 : 12,5 = 3875,42

Proviamo?

484427,5 : 125 = 3875,4
<u>375</u>
1094
<u>1000</u>
942
<u>875</u>
677
<u>625</u>
525
<u>500</u>
25 resto

O meglio:

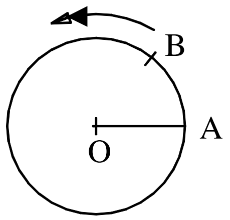
484427,5 : 125 = 3875,4
1094
==942
=677
525
=25 resto

19787,36 : 168 =117,78
=298
1307
=1313
=1456
=112 resto

18754366 98472,6 : 5357829 = 350036,6
<u>16073487</u>
26808799
<u>26789145</u>
19654847
<u>16073487</u>
35813602
<u>32146974</u>
36666286
<u>32146974</u>
4519312 resto

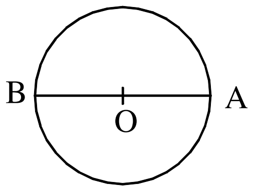
Chiamare gli allievi alla lavagna per verificare la loro conoscenza sia della tavola pitagorica che la padronanza delle operazioni elementari: somma, sottrazione…

<u>CIRCONFERENZE</u>

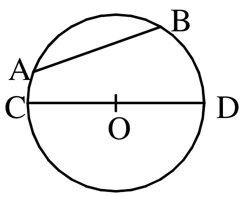


O = Centro
OA = Raggio

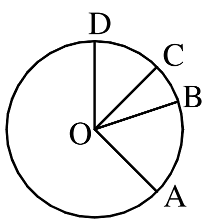
E' una linea avente tutti i punti alla stessa distanza dal punto O. Due circonferenze descritte con raggi uguali , sono uguali.



Due punti A – B dividono la circonferenza in due parti chiamati <u>archi</u>.
I punti A B rappresentano gli <u>estremi</u> dei due archi.
Essendo la retta passante per il centro, si formeranno <u>due semicirconferenze</u>.

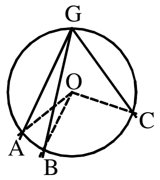


Il segmento A B avente gli estremi sulla circonferenza si chiama <u>corda</u>
Se la corda contiene il centro O si chiama <u>diametro</u>.
Qualsiasi corda non passante per il centro sarà minore del diametro della circonferenza in esame.



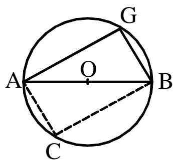
Gli angoli al centro sono :
AÔB ; BÔC ; CÔD ; AÔC ; AÔD ecc. ecc.

e sono comprensivi dell'arco.

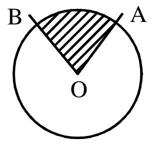


AĜB ; AĜC ; BĜC
Sono angoli inscritti in una circonferenza e comprendono i rispettivi archi.
L'angolo alla circonferenza e l'angolo al centro comprendente lo stesso arco è uno il doppio dell'altro.

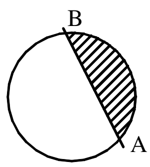
2AĜB = AÔB



Angoli inscritti in mezza circonferenza sono retti cioè 90°
AĜB = 90°
Lo si deduce pensando ad un rettangolo, o meglio ad un quadrato inscritto in una circonferenza.



La parte tratteggiata AÔB racchiusa in due raggi e dell'arco compreso, viene definita <u>Settore circolare</u>.



La parte tratteggiata che comprende la corda AB e l'arco compreso, si dice <u>Segmento di cerchio</u>.

La lunghezza di una circonferenza si ottiene:

moltiplicando il numero 6,28 per la lunghezza del raggio,

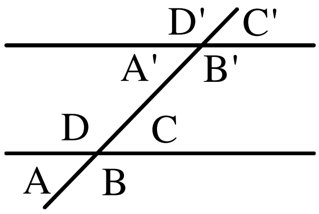
$$C = 2 \pi r$$

moltiplicando il diametro per 3,14,

π = 3,14 valore ordinario ; 3,1416 più prossimo alla realtà.

<u>RETTE PARALLELE</u>

Angoli che due rette parallele formano con una trasversale:



D D' = corrispondenti ; D B' = alterni interni ; A C' = alterni esterni
C B' = coniugati interni ; B C' = coniugati esterni

Se due rette parallele sono tagliate da una trasversale:

a) **due angoli corrispondenti sono uguali $\hat{A}$ $\hat{A}'$**
b) **due angoli alterni (interni od esterni) sono uguali $\hat{C}$ $\hat{A}'$; $\hat{A}$ $\hat{C}'$**
c) **due angoli coniugati (interni od esterni) sono supplementari, cioè formano un angolo piatto.**

$\widehat{A} + \widehat{D} = 180°$ $\qquad$ $\widehat{B} + \widehat{C} = 180°$

<u>TRIANGOLI</u>

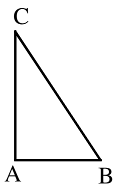
Il lato del triangolo (e così vale per qualsiasi poligono) è sempre minore della somma degli altri due.

La somma degli angoli interni di un triangolo qualsiasi è sempre di 180°, cioè, di un angolo piatto.

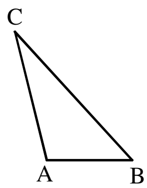
Se due angoli di un poligono misurano 90° non si tratta certamente di un triangolo.

Se due angoli di un triangolo sono uguali a due angoli di un altro triangolo, anche i terzi angoli saranno uguali.

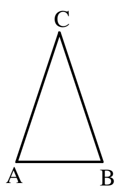
<u>CASSIFICAZIONE DEI TRIANGOLI IN BASE AGLI ANGOLI</u>



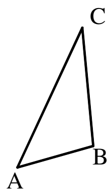
Rettangolo



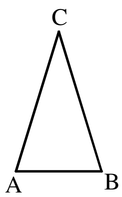
Ottusangolo



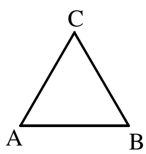
Acutangolo



Scaleno a 3 lati disuguali



Isoscele 2 lati uguali



Equilatero 3 lati uguali

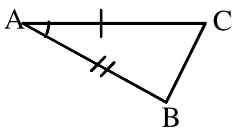
La somma degli angoli interni di un poligono regolare è uguale a tante volte un angolo piatto quanti sono i lati; diminuito di 2.

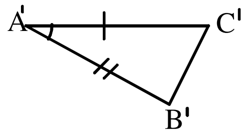
Triangolo $180° \times (3 - 2) = 180° \times 1 = 180°$
Quadrilatero $180° \times (4 - 2) = 180° \times 2 = 360°$
Pentagono $180° \times (5 - 2) = 180° \times 3 = 540°$
Ecc. ecc.

CRITERI DI UGUALIANZA DEI TRIANGOLI

I criterio di uguaglianza:

Due triangoli aventi due lati uguali e uguale l'angolo fra essi compreso, sono uguali.

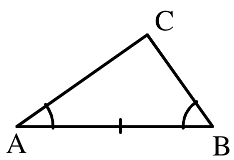


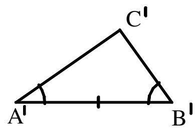


AC = A'C' **AB = A'B'** **CÂB = C'Â'B'**

II Criterio di uguaglianza:

Due triangoli aventi uguale un lato e gli angoli opposti ad esso adiacenti, sono uguali.

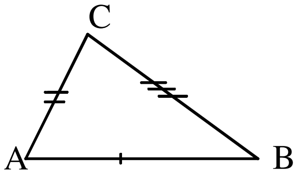


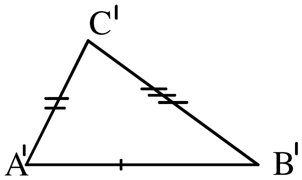


AB = A'B' **CÂB = C'Â'B** $\widehat{\mathbf{ABC}}$ **=** $\widehat{\mathbf{A'B'C'}}$

III Criterio di uguaglianza:

Due triangoli aventi uguali i lati corrispondenti, sono uguali.





AB = A'B' **BC = B'C'** **CA = C'A'**

AREE DI SUPERFICIE

Unità di misura m^2. I suoi multipli e sottomultipli, sempre al quadrato, devono risultare omogenei.

$m \times m = m^2$ $km \times km = km^2$ $cm \times cm = cm^2$

$cm \times m$ = errato !

Quadrato: $A = l^2$
Rettangolo: $A = b \times h$ oppure A = lato maggiore x lato minore
Triangolo: $A = \frac{1}{2}\, b \times h = b \times h / 2$
Trapezio: $A = (a+b) \times h / 2$ a = base minore ; b = base maggiore

POLIGONI REGOLARI

Se il centro di un poligono regolare si congiunge con i vertici, il poligono risulta scomposto in tanti triangoli quanti sono i lati. Potremmo calcolare l'area del poligono moltiplicando le aree dei triangoli per il numero dei lati. L'altezza dei singoli triangoli si dice <u>apotema</u> del poligono.

Risulta pertanto la formula generale:

$$A = \frac{l \times a \times n}{2}$$

l = lato del poligono che è base del triangolo
a = apotema che risulta altezza del triangolo
n = numero dei lati del poligono

essendo l x n la misura della somma dei lati, la precedente diventerà:

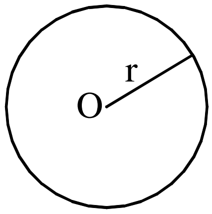
$$A = \frac{p \times a}{2}$$

dove p = perimetro

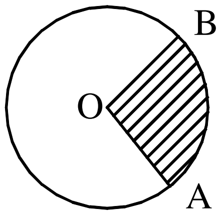
<u>Alcuni valori di apotema</u>: (poligoni regolari)

Triangolo: $a3 = 0{,}288 \times L3$
Pentagono: $a5 = 0{,}688 \times L5$
Esagono: $a6 = 0{,}866 \times L6$

<u>Area del cerchio e del settore circolare</u>:



$A = \pi r^2$ conoscendo il diametro $A = \dfrac{\pi D^2}{4}$



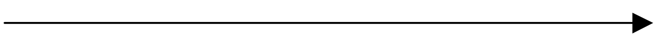
AÔBA = settore circolare

L'area di un settore circolare si ottiene con il prodotto della lunghezza dell'arco moltiplicato metà raggio.

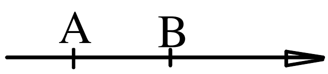
$\overset{\frown}{AB} \times \frac{1}{2} AO$ = A sett. circ.

<u>COORDINATE CARTESIANE</u>

<u>Rette e segmenti orientati</u>:

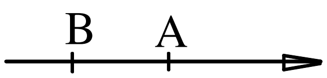


Una retta si dice orientata quando su di essa è fissato un verso che si chiama positivo. L'altro sarà negativo.
In figura ci serviremo di una freccia che indicherà il verso positivo.



Per convenzione A – B verso orientato positivo. Coppia orientata di punti A e B estremi ad un segmento orientato.

A = origine del segmento ; B = estremo dello stesso segmento

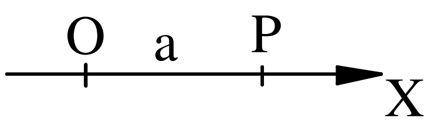


Verso orientato negativo

A differenza di quanto è convenuto in geometria elementare il segmento orientato AB verrà indicato con la scrittura:

$$\overline{\mathbf{AB}}$$

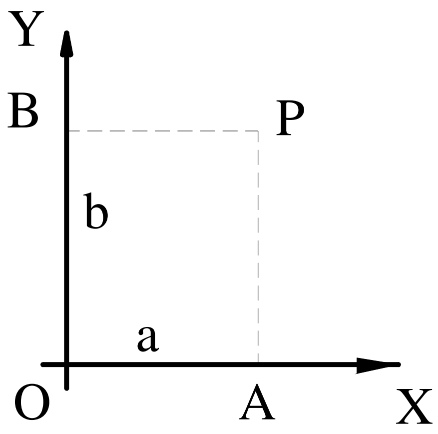
Ascisse sulla retta:



O punto origine che divide la retta in due semirette.

Preso un punto qualsiasi P sulla retta X e fissata un'unità di misura, indicheremo con a la misura del segmento OP, il numero a si chiama ascissa del punto P.

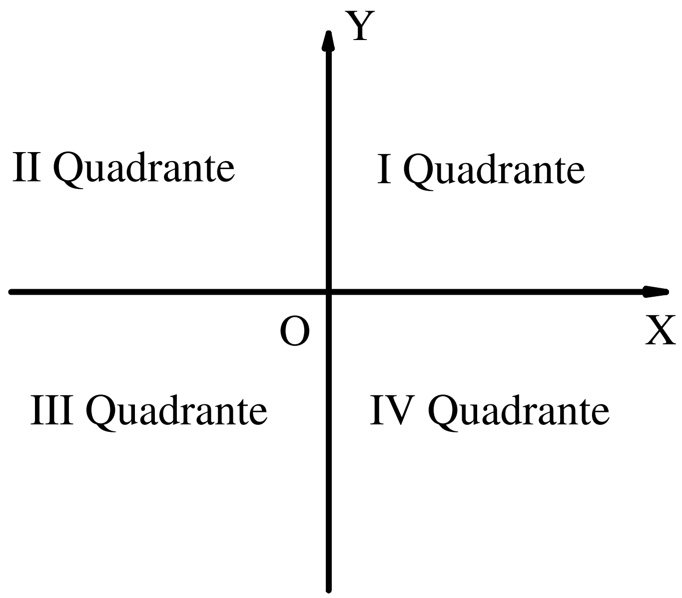
<u>COORDINATE CARTESIANE</u> ortogonali nel piano.



1) **Fissiamo due rette orientate perpendicolari fra loro X e Y**
2) **Chiamiamo origine il punto d'incontro =**
3) **L'asse X risulterà quello delle ascisse**
4) **L'asse Y risulterà quello delle ordinate**
5) **Prendiamo un punto P qualunque del piano**
6) **Tracciamo le perpendicolari agli assi X e Y e troveremo rispettivamente i punti A e B**
7) **Fissiamo l'unità di misura a e b dei segmenti orientati**

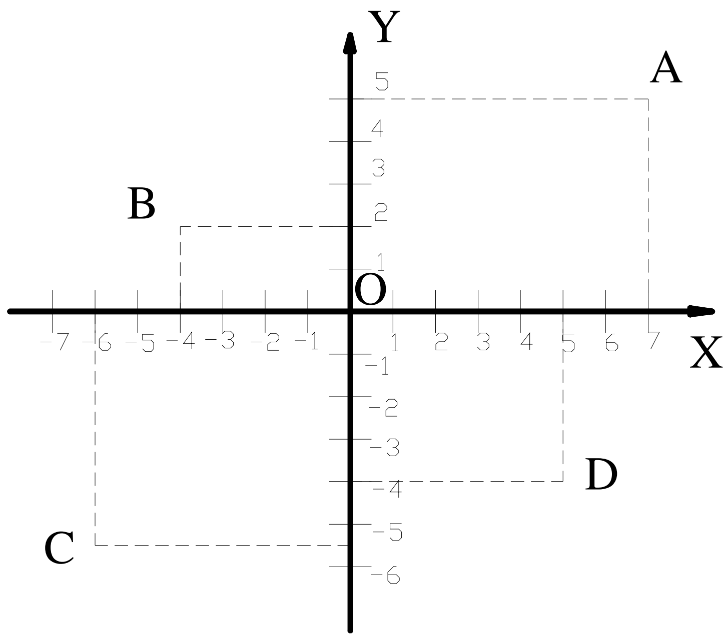
$$\overline{OA} = a \qquad \overline{OB} = b$$

I due numeri così trovati saranno le coordinate cartesiane ortogonali del punto P.
Precisamente a = ascissa del punto P b = ordinata del punto P



Due assi cartesiani ortogonali dividono il piano in quattro parti detti <u>quadranti</u>.

Esempio di coordinate cartesiane dei punti A B C D



A (7 ; 5) **B (-4 ; 2)** **C (-6 ; -5,5)** **D (5 ; -4)**

Il primo numero si riferisce all'ascissa del punto in esame. Il secondo numero all'ordinata dello stesso punto.

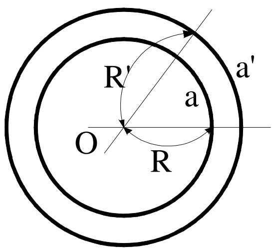
<u>Ripetizione e aggiunta</u>

Angoli: chiamasi angolo ciascuna delle due parti di un piano in cui esso è diviso da due semirette uscenti da uno stesso punto O chiamato origine. (incluse queste due semirette)

<u>Misura elementare degli angoli</u>:

Unità pratica: <u>grado</u>   1/60 di grado = primo   1/60 di primo = secondo

Unità teorica: <u>radiante</u>



<u>a</u> ed <u>a'</u> hanno lo stesso angolo al centro.

a : a' = R : R'   per un noto teorema di geometria

ponendo a = R   e a' = R'   si enuncia:

Chiamasi angolo <u>Radiante</u>, l'angolo al centro di una circonferenza, di raggio arbitrario, che ha come base un arco di lunghezza uguale a quella del suo raggio.

Ponendo il raggio come unità di misura cioè:

$2\pi r$ essendo $r = 1$ risulterà:

Angolo giro = 2π
Angolo piatto = π
Angolo retto = $\pi/2$

Risulterà per il calcolo:

$360 : 2\pi = y : x$ **x = misura di un angolo in radianti**
y = misura di un angolo in gradi

ne derivano:

$x = (\pi / 180)\, y$ **$y = (180 / \pi)\, x$**

FUNZIONI GONIOMETRICHE DI UN ANGOLO ORIENTATO

Nelle applicazioni si presentano continuamente dei problemi di questo tipo:

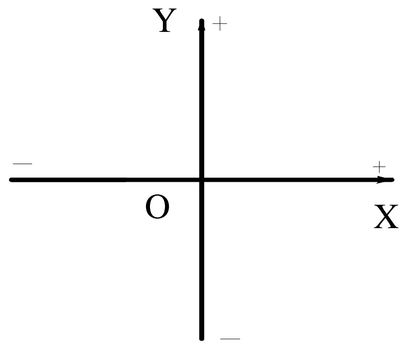
Noti tre elementi di un triangolo, fra i quali sia compreso almeno un lato, determinare la misura degli altri tre.

Gli elementi di un triangolo sono 6 : 3 angoli e 3 lati

La geometria ci permette di misurare con approssimazione gli elementi di un triangolo, in particolar modo i valori angolari.
Con il calcolo algebrico si raggiunge l'approssimazione desiderata.
La trigonometria utilizza il calcolo algebrico nella risoluzione dei triangoli.

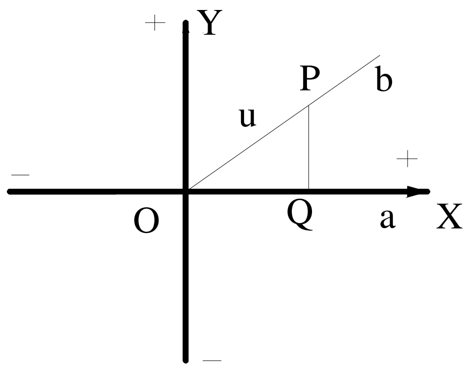
Goniometria = misura dell'angolo
Trigonometria = Trigonon = Triangolo Metron = misura

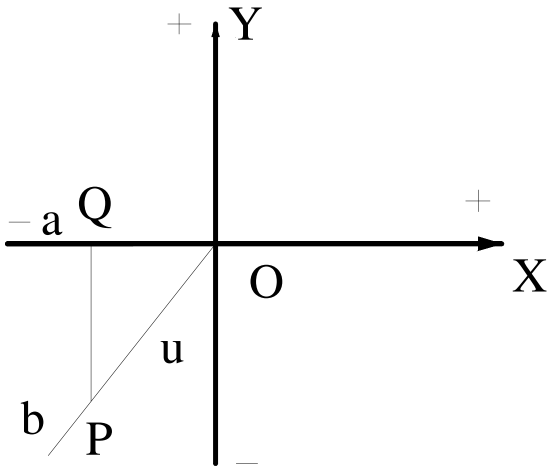
Definizione del Seno di un angolo orientato



Convenzione: in un sistema di assi cartesiani ortogonali O x y sono considerati positivi se coincidono con il verso, negativi se non coincidono

Indicheremo sempre con la lettera u l'unità di misura per i segmenti , segmenti scelti ad arbitrio:





Dato un angolo orientato $\widehat{ab}$, di vertice O, si consideri il sistema cartesiano ortogonale ad esso associato.

Si prenda sul <u>secondo lato</u> b il punto P tale che OP = u e si consideri con Q la sua proiezione ortogonale sul <u>primo lato</u> a.

Chiamasi Seno dell'angolo orientato $\widehat{ab}$ e si scrive:

$$\text{sen } \widehat{ab}$$

l'ordinata del punto P, cioè la misura del segmento orientato QP, fatta rispetto all'unità di misura OP = u

sarà pertanto:

$$\text{sen } \widehat{ab} = \frac{QP}{OP} = \overline{QP}$$

ricordo che OP = u e u = 1

Il seno di un angolo orientato è una frazione dell'angolo stesso cioè della sua ampiezza.

Esiste il seno di qualsiasi angolo orientato?

Casi particolari:

$$\text{sen } 0° = 0$$
$$\text{sen } 90° = 1$$
$$\text{sen } 180° = 0$$
$$\text{sen } 270° = -1$$
$$\text{sen } 360° = 0$$

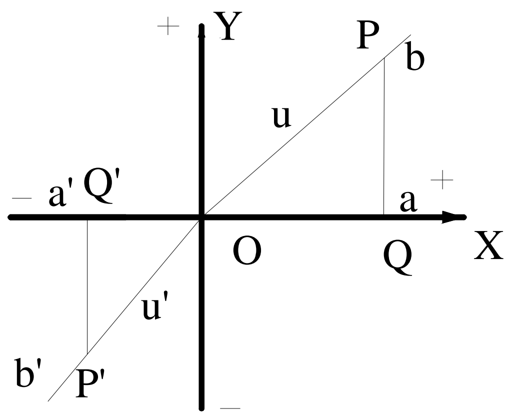
Il seno di un angolo orientate non potrà mai essere un numero superiore ad 1 sia esso positivo che negativo.

Sono assurde scritte tipo: $\text{sen}\alpha = 2$ $\text{sen}\alpha = 1{,}0001$

Fare qualche esempio sia alla lavagna che con la calcolatrice.

Definizione del Coseno di un angolo orientato

Dato un angolo orientato $\widehat{ab}$, $\widehat{a'b'}$, di vertice O, si consideri il sistema cartesiano ad esso associato.



Si prende sul secondo lato b o b' il punto P o P' tale che sia OP = u ; O'P' = u' e si indichi con Q o Q' la sua proiezione ortogonale sul lato a o a'.

Chiamasi Coseno dell'angolo orientato $\widehat{ab}$ o $\widehat{a'b'}$ e si scrive:

$$\cos \widehat{ab} \qquad \cos \widehat{a'b'}$$

l'ascissa del punto P o P', cioè la misura del segmento orientato OQ o OQ', fatta rispetto all'unità di misura OP = u oppure OP' = u'.

Sarà pertanto:

$$\cos \widehat{ab} = \frac{OQ}{OP} = \overline{OQ} \qquad \cos \widehat{a'b'} = \frac{O'Q'}{OP'} = OQ'$$

Ricordo che OP = u oppure OP' = u'

Il coseno di un angolo orientato è una funzione dell'ampiezza dell'angolo stesso.

Esiste il coseno di qualsiasi angolo orientato.

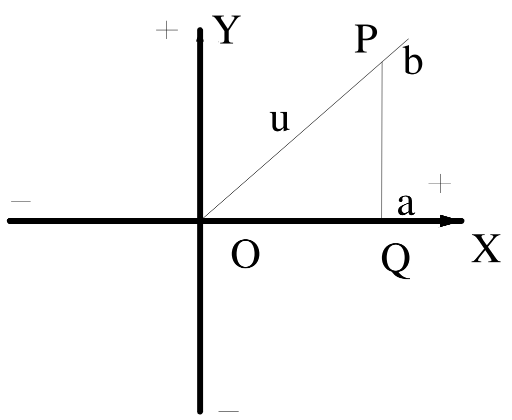
Casi particolari:

$$\cos 0° = 1$$
$$\cos 90° = 0$$
$$\cos 180° = -1$$
$$\cos 270° = 0$$
$$\cos 360° = 1$$

Come per il seno, così anche per il coseno di un angolo orientato, non potrà mai essere un numero superiore a 1 sia esso positivo che negativo.

Fare qualche esempio sia con la calcolatrice che con qualche triangolo alla lavagna.

<u>Definizione di Tangente di un angolo orientato</u>



Dato un angolo orientato $\widehat{ab}$, di vertice O, ecc. ecc.

Chiamasi tangente dell'angolo orientato $\widehat{ab}$, e si scrive:

$$tg\ \widehat{ab}$$

il rapporto fra l'ordinata e l'ascissa del punto P, ossia il rapporto fra i due segmenti orientati QP e OQ.

Sarà pertanto:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{QP}}{\overline{OQ}} = \frac{QP}{OQ}$$

ma essendo QP = sen α e OQ = cos α

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

<u>Non esiste la tangente di tutti gli angoli orientati !!</u>

<u>Non esiste la tangente degli angoli il cui coseno è zero!!</u>

$$\operatorname{tg} 0° = 0 \qquad \operatorname{tg} 180° = 0 \qquad \operatorname{tg} 360° = 0$$

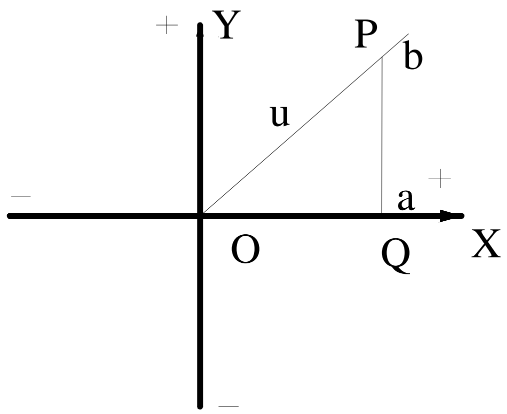
essendo:

$$\operatorname{tg} 0° = \frac{\operatorname{sen} 0°}{\cos 0°} = \frac{0}{1} \qquad \operatorname{tg} 180° = \frac{\operatorname{sen} 180°}{\cos 180°} = \frac{0}{-1} \qquad \operatorname{tg} 360° = \frac{\operatorname{sen} 360°}{\cos 360°} = \frac{0}{1}$$

Si usa dire che con l'aumento di α superiore a 0° e prossimo a $90° = \frac{\pi}{2}$ la tangente α cresce da 0 a più infinito (+ ∞)
In realtà quando α assume il valore 90° <u>non esiste la tangente</u>
Potremmo affermare che la tg α varia assumendo <u>tutti</u> i valori positivi al variare di α da 0 a 90° e <u>tutti</u> i valori negativi al variare di α da 90° a 180°
La tangente di un angolo orientato, al variare dell'angolo, può assumere qualunque valore, positivo, negativo o nullo, cioè varia, come si suol dirsi da -∞ a + ∞

La tangente di un angolo orientato è positiva se il secondo lato dell'angolo cade nel 1° o 3° quadrante del sistema cartesiano ; è invece negativa se cade nel 2° e 4° quadrante.

Definizione di Cotangente di un angolo orientato



Chiamasi cotangente dell'angolo orientato $\widehat{ab}$, e si scrive:

$$\text{ctg } \widehat{ab}$$

il rapporto fra l'ascissa e l'ordinata del punto P, ossia il rapporto fra i due segmenti orientati OQ e QP.

Sarà pertanto:

$$\text{ctg } \alpha = \frac{\overline{OQ}}{\overline{QP}}$$

ma essendo OQ = cos α
e QP = sen α

$$\text{ctg } \alpha = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha}$$

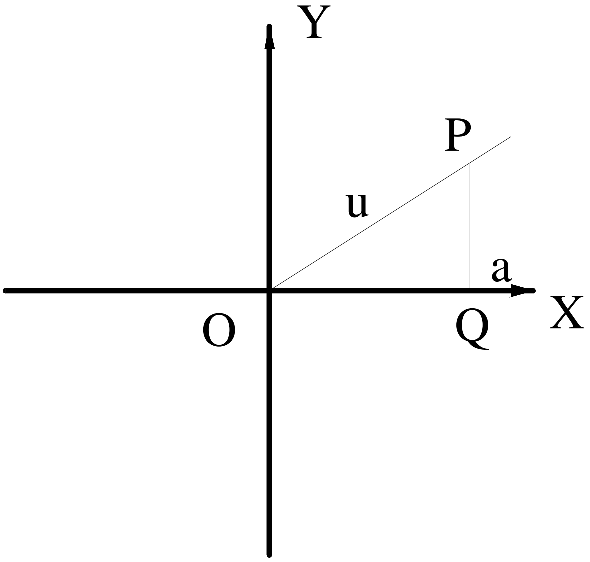
<u>Non esiste la cotangente di tutti gli angoli orientati !!</u>

<u>Non esiste la cotangente il cui seno è 0 !!</u>

$$\text{ctg } 90° = 0 \qquad \text{ctg } 270° = 0$$

Vale quanto detto per la tangente ma nel valore inverso.

Relazioni fondamentali fra le funzioni goniometriche di uno stesso angolo orientato.



$\overline{OP} = u = 1$ $\overline{QP} = \text{sen}\ \alpha$ $\overline{OQ} = \cos\alpha$

Per il teorema di Pitagora :

$\overline{OP}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{QP}^2$ **quindi nella forma più comune:**

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Valgono anche le relazioni:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{ctg}\ \alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\ \alpha} \qquad \text{tg}\ \alpha = \frac{1}{\text{ctg}\ \alpha} \qquad \text{ctg}\ \alpha = \frac{1}{\text{tg}\ \alpha}$$

<u>Noto sen α</u> si ricava:

$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \text{sen}^2\alpha}$ **che sostituita alle precedenti sarà:**

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\pm\sqrt{1 - \text{sen}^2\alpha}} \qquad \text{ctg}\ \alpha = \frac{\pm\sqrt{1 - \text{sen}^2\alpha}}{\text{sen}\ \alpha}$$

<u>Noto cos α</u> si ricava:

$\text{sen}\,\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$ che sostituita alla precedente sarà :

$$\text{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}} \qquad \text{tg}\,\alpha = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$$

I segni ± davanti alle radici indicano solo in quale quadrante del sistema cartesiano cade il secondo lato <u>b</u> dell'angolo.

Le formule trovate sono riunite, per maggior comodità nella seguente tabella.

NOTO	sen α	cos α	tg α	ctg α
sen α	sen α	$\pm\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}$	$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}{\text{sen}\,\alpha}$
cos α	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	cos α	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$
tg α	$\frac{\text{tg}\,\alpha}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}$	tg α	$\frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$
ctg α	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{ctg}^2\alpha}}$	$\frac{\text{ctg}\,\alpha}{\pm\sqrt{1+\text{ctg}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\text{ctg}\,\alpha}$	ctg α

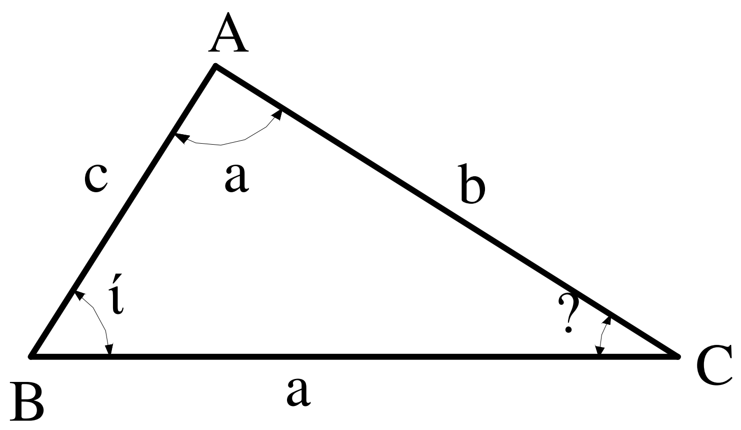
Alcuni angoli notevoli:

$$\text{sen}\,45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{tg}\,45° = 1 \qquad \text{ctg}\,45° = 1$$

$$\text{sen}\,30° = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{tg}\,30° = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{ctg}\,30° = \sqrt{3}$$

RELAZIONE FRA GLI ELEMENTI DI UN TRIANGOLO RETTANGOLO

Si tratta di relazioni che legano le misure dei lati di un triangolo ai valori delle funzioni trigonometriche degli angoli.
Formuleremo alcune convenzioni che devono essere ricordate.



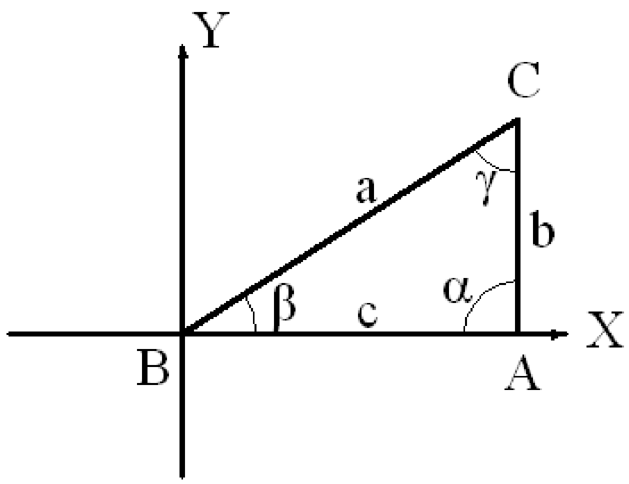
a , b , c   lati opposti ad A , B , C vertici

α, β, γ   valore in gradi degli angoli il cui vertice è rispettivamente A - B - C

Sussistono le seguenti relazioni:

1) **In un triangolo rettangolo, la misura di un cateto è uguale a quella dell'ipotenusa moltiplicata per il seno dell'angolo opposto al cateto.**
2) **In un triangolo rettangolo, la misura di un cateto è uguale a quella dell'ipotenusa moltiplicata per il coseno dell'angolo acuto adiacente al cateto stesso.**
3) **In un triangolo rettangolo, la misura di un cateto è uguale alla misura dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al cateto cercato.**

4) In un triangolo rettangolo, la misura di un cateto è uguale alla misura dell'altro cateto per la cotangente dell'angolo acuto adiacente al cateto cercato.



Si ricava:

$b = a \ \text{sen}\ \beta$	**$c = a \ \cos \beta$**	**$b = c \ \text{tg}\ \beta$**	**$c = b \ \text{ctg}\ \beta$**
$c = a \ \text{sen}\ \gamma$	**$b = a \ \cos \gamma$**	**$c = b \ \text{tg}\ \gamma$**	**$b = c \ \text{ctg}\ \gamma$**

<u>FINE DELLA TRIGONOMETRIA PIANA DI BASE</u> .